De volgorde van bewerkingen

De volgorde van bewerkingen wordt in het eerste leerjaar A aangeleerd. Ook in verschillende lagere scholen komt dit aan bod. Daarbij worden allerlei ezelbruggetjes (zoals Het Mannetje Dat Ons Aankijkt: Haakjes, Vermenigvuldigen, Delen, Optellen en Aftrekken) aangeboden.

Als leerlingen de reden van deze volgorde weten, is de kans groter dat ze deze correct toepassen en niet enkel een 'recept' gebruiken dat ze na verloop van tijd toch niet meer zo goed kennen, wellicht omdat ze het zich enkel als recept herinneren.

Waarom zetten we haakjes?

Wellicht herinneren we ons hoofdrekenoefeningen uit de lagere school zoals de volgende:

Neem de som van 4 en 1	4 + 1 = 5
Vermenigvuldig dit met 2	5 . 2 = 10
Vermenigvuldig dit getal met zichzelf	10 . 10 = 100 of $10^2 = 100$
Trek er 12 van af	100 - 12 = 88
Deel je resultaat door 4	88 : 4 = 22
Welk getal bekom je?	22

Schrijven we dit in één lijn $4 + 1 \,.\, 2^2 - 12 \,:\, 4$, dan bekomen we door de afspraken rond de volgorde van bewerkingen niet 22, maar 5 want 4 + 4 – 3 = 5

Als deze lijn niet gewoon van links naar rechts berekend wordt zoals de hoofdrekenoefening en we toch dezelfde uitkomst willen bekomen dan moeten er haakjes geplaatst worden:

$$\left(\left((4+1)\cdot 2\right)^2 - 12\right) : 4$$

Waarom heeft de vermenigvuldiging voorrang op de optelling?

Waarom werd de afspraak rond de volgorde van bewerkingen ingevoerd? Waarom heeft men niet de conventies aangenomen om gewoon van links naar rechts de opeenvolgende bewerkingen uit te rekenen? Dat dit niet vol te houden is, kan verklaard worden vanuit het volgende voorbeeld.

Sara koopt drie kleine taartjes van 4 EURO en één grote taart van 10 EURO. Hoeveel moet ze betalen?

Hopelijk berekent de leerling dit als volgt:

3 . 4 + 10 = 12 + 10 = 22

De rekening bedraagt 22 EUR.

In de lagere school wordt ook al aangeleerd dat men mag 'wisselen', de communicatieve eigenschap bij de optelling toepassen dus.

12 + 10 = 10 + 12

De rekening zou dus ook als volgt kunnen gemaakt worden:

10 + 3 . 4

Maar als de bewerkingen van links naar rechts uitgevoerd worden (zonder de afspraken over de volgorde van bewerkingen), dan is het resultaat fout want 10 + 3 = 13 en 13 . 4 = 52. De communicatieve eigenschap willen we niet overboord gooien. Als we niet extra haakjes willen invoeren om aan te duiden welke bewerking eerst aan beurt komt, moeten we afspreken eerst de vermenigvuldiging te berekenen.

10 + 3 . 4 = 10 + 12 = 22

Bovenstaand voorbeeld kan voor veel leerlingen een voldoende argument zijn om de voorrangsregel te aanvaarden.

Zelf vind ik de verklaring die te vinden is bij de definitie van de bewerkingen op zich overtuigender.
Als Sara drie kleine taartjes van 4 EURO en één grote taart van 10 EURO koopt, dan kan de kassierster alle drie kleine taartjes en één grote taart door de scanner laten gaan:

10 + 4 + 4 + 4 = 22

De kassierster kan ook een klein taartje éénmaal scannen en dan op een vermenigvuldigingtoets (maal 3) drukken. Dat is efficiënter. Om te berekenen hoeveel het bedrag zal zijn, nemen we eerst de prijs van de grote taart en vullen we met de prijs van de kleine taartjes.

10 + (4 + 4 + 4) = 22

Voor deze som tussen haakjes bestaat er een kortere schrijfwijze:

10 + (4 + 4 + 4) = 22

Deze vermenigvuldiging vervangt de haakjes. Omdat haakjes altijd eerst worden genomen, moet ook de vermenigvuldiging voor de optelling worden uitgevoerd, want **de vermenigvuldiging is eigenlijk een optelling van gelijke termen die tussen haakjes staat.**

Waarom heeft de machtsverheffing voorrang op de optelling?

Een zelfde redenering geldt ook voor de machtsverheffing:

$$5.\ 3 . 3 . 3 . 3 \ = \ 5.\ (3 . 3 . 3 . 3) = \ 5 . 3^4 = 5 . 81 \ = \ 405$$

Een vierdemacht is ook een verkorte schrijfwijze voor een product van vier gelijke factoren. Deze vermenigvuldiging wordt eerst genomen en wordt daarom tussen haakjes gezet. 3^4 vervangt de haakjes van de herhaalde vermenigvuldiging met 3. Pas daarna is de vermenigvuldiging met de factor 5 aan beurt.
Omdat haakjes altijd eerst worden genomen, heeft deze machtsverheffing voorrang op de vermenigvuldiging.
Eigenlijk is de volgorde van bewerkingen niet als 'een afspraak' ingevoerd maar hangt ze samen met de definitie van de vermenigvuldiging, machtsverheffing en met de regel dat haakjes altijd voorrang hebben.

Voorbeelden

Een oefening kan uiteengerafeld worden door de definitie van macht en vermenigvuldiging te gebruiken en zo duidelijk te maken welke bewerking logischer wijze eerst aan bod komt. Misschien helpen deze tussenstappen bij leerlingen die er niet n slagen de volgrode van bewerkingen te automatiseren.

- $5 . 8 + 2 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 2$
  $= (8 + 8 + 8 + 8 + 8) + 2$
  $= (5 . 8) + 2$
  $= 40 + 2$
  $= 42$

  Als een leerling eerst 8 met 2 optelt (misschien omdat een tussenresultaat 10 aantrekkelijk is?) dan kan het uitrafelen van de foutieve methode de leerling misschien tot correcte inzichten brengen.

  $5 . 8 + 2 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 2$
  $= 8 + 8 + 8 + 8 + (8 + 2)$
  $= 8 + 8 + 8 + 8 + 10$
  Maar dit is niet $5 . (8 + 2)$ of $5 . 10$.
  Leerlingen die zich niet houden aan de volgorde van bewerkingen bekomen 50 als resultaat.

- $5 . 2^3 = 5 . 2 . 2 . 2$
  $= 5 . (2 . 2 . 2)$
  $= 5 . (2^3)$
  $= 5 . 8$
  $= 40$

  Als 5 eerst met 2 wordt vermenigvuldigd, dan kan de oefening terug uiteengerafeld worden
  $5 . 2^3 = 5 . 2 . 2 . 2$
  $= (5 . 2) . 2 . 2$
  $= 10 . 2 . 2$
  Maar dit is niet $(5 . 2)^3$ of 10^3

- $27 – 7 . 3 = 27 – (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3)$ Hier zijn de haakjes onmiddellijk nodig.
  $= 27 – (7 . 3)$
  $= 27 – 21$
  $= 6$
  Als 7 eerst van 27 wordt afgetrokken, dan kan de oefening terug uiteengerafeld worden.
  $27 – 7 . 3 = 27 – 3 . 7$
  $= 27 – (7 + 7 + 7)$
  $= 27 – (3 . 7)$
  $= 27 – 21$
  $= 6$
  Maar dit is niet $(27 – 7) . 3 = 20 . 3 = 60$

- $12 - 2^4 = 12 - 2 . 2 . 2 . 2$
  $= 12 – (2 . 2 . 2 . 2)$
  $= 12 – (2^4)$
  $= 12 – 16$
  $= -4$

Als een leerling eerst 2 van 12 aftrekt, dan kan het uitrafelen terug verheldering brengen.
$12 - 2^4 = 12 - 2 . 2 . 2 . 2$
Dit is niet $(12 – 2)^4 = 10^4 = 10000$ en ook niet $(12-2) . 2 . 2 . 2 = 10 . 8 = 80$

Waarop hebben vierkantswortels voorrang?

De worteltrekking is een machtsverheffing met rationale breuken, maar dat is nog niet voor de eerste graad aan de orde. Dat er, naar mijn aanvoelen, minder fouten gemaakt worden bij de vierkantswortel heeft volgens mij te maken met het symbool $\sqrt{}$. De horizontale lijn helpt om duidelijk te maken of de vierkantswortel eerst moet genomen worden zoals bij $\sqrt{4}\,.\,6+1$ of dat de vierkantwortel als laatst aan bod komt zoals bij $\sqrt{4\,.\,6+1}$. De horizontale lijn van het wortelteken heeft dezelfde functie als haakjes.

$$\sqrt{4\,.\,6+1} = (4\,.\,6+1)^{\frac{1}{2}}$$

De van-links-naar-rechts-regel

Bij oefeningen als 15 – 7 + 3 – 1 wordt in de lagere school aangeleerd van links naar rechts te rekenen zo dat de leerling niet de fout zou maken om 7 eerst met 3 op te tellen en deze som van 15 af te trekken:

15 – (7 + 3) - 1 = 4 .

Dit is natuurlijk fout omdat de optelling met 3 door het invoeren van haakjes een vermindering met 3 wordt. Omdat 7 + 3 een gemakkelijke som is, wordt deze fout wel eens gemaakt.
In het secundair wordt er minder gehamerd op het belang van ‘van links naar rechts’. Waarom?
De aftrekking is de optelling van de tegengestelde term

5 -3 = 5 + (-3)

en de deling is de vermenigvuldiging van omgekeerde factor

5 : 3 = 5 . $\frac{1}{3}$.

Daarom staan deling en aftrekking op het zelfde niveau als vermenigvuldiging respectievelijk optelling. Dat neemt niet weg dat een verstrooide leerling in de eerste graad toch 4 voor het resultaat van 15 – 7 + 3 – 1 zal noteren. Meestal krijgt de leerling in de eerste graad de ‘raad’ (of is het ook een regel die de regel van de lagere school ‘van links naar rechts’ vervangt?) om de positieve getallen bij elkaar op te tellen en ook de negatieve getallen en daarna de aftrekking uit te voeren.

$$\begin{aligned} 15-7+3-1 &= 15+3-7-1 \\ &= 18+(-7)+(\,-1) \\ &= 18+(-8) \\ &= 18-8 \\ &= 10 \end{aligned}$$

De werkwijze van de eerste graad wordt niet gebruikt in de lagere school omdat daar nog niet met negatieve getallen gerekend wordt. De som van negatieve getalen -7 en -1 eerst nemen is nog niet aan de orde.
Door de eigenschap van het ‘wisselen’ kan deze oefening wel als volgt kan aangepakt worden:

15 – 7 + 3 – 1 = 15 + 3 – 7 – 1
= 18 – 7 – 1
= 11 – 1
= 10.

Deze benadering kan helpen om van ‘van links naar rechts’ over te schakelen naar ‘eerst de optellingen van positieve en daarna die van de negatieve getallen’ . En dus om ook de overstap van de lagere school naar de eerste graad niet al te groot te maken.

De volgorde van bewerkingen staat in elke boek van de eerste graad A-stroom beschreven. Maar vaak enkel als een afspraak, omdat er nu eenmaal een afspraak moet zijn. Maar deze afspraak is niet toevallig, net zoals in het verkeer de voorrang van rechts niet een toevallige afspraak is.

Artikel uitwiskeling 2017 Machteld Verhenne